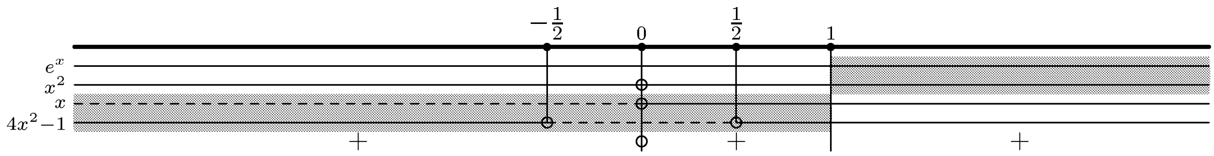
CLEAI, matematica generale, primo semestre: soluzioni prova scritta 18 dicembre 2002

Studio di funzione, 1 di 4.

Campo d'esistenza: $\mathbb{R}$.
Segno: poiché $4x^3 - x = x(4x^2 - 1)$, si ottiene:



Limiti in $\mathbf{x = 1}$ (continuità):

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 e^x = e, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 4x^3 - x = 3.$$

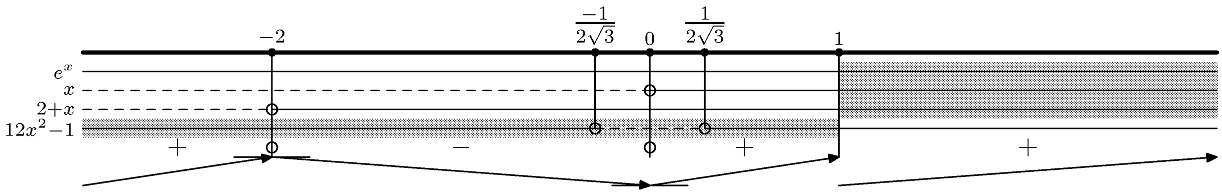
Poiché i limiti destro e sinistro non coincidono, $f(x)$ non è continua in $x = 1$.
Limiti ai bordi del campo d'esistenza:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^2 e^x \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to +\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 4x^3 - x = \lim_{x\to +\infty} x^3 (4 - \frac{1}{x^2}) = +\infty.$$

Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} xe^x(2+x) & \text{se} \quad x < 1 \\ 12x^2 - 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

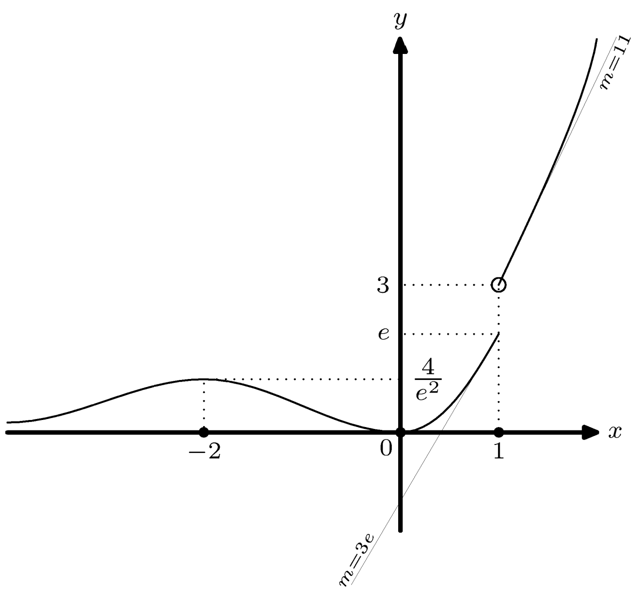
Segno derivata prima (crescenza e decrescenza):



Limiti destro e sinistro di $\mathbf{f'(x)}$ in $\mathbf{x = 1}$ (pendenza destra e sinistra in $\mathbf{x = 1}$):

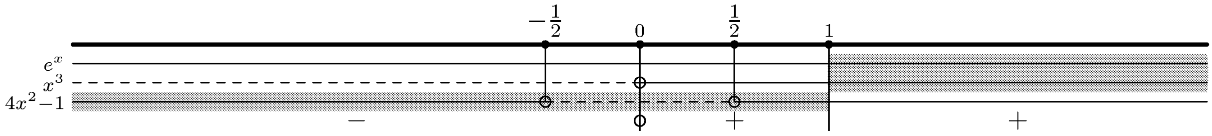
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} xe^x(2+x) = 3e, \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 12x^2 - 1 = 11.$$

Grafico di $\mathbf{f(x)}$:



Studio di funzione, 2 di 4.

Campo d'esistenza: $\mathbb{R}$.
Segno:



Limiti in $\mathbf{x = 1}$ (continuità):

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^3 e^x = e, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 4x^2 - 1 = 3.$$

Poiché i limiti destro e sinistro non coincidono, $f(x)$ non è continua in $x = 1$.

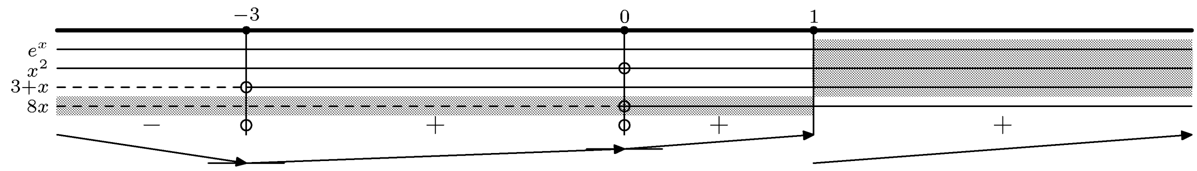
Limiti ai bordi del campo d'esistenza:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^3 e^x \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to +\infty} -\frac{t^3}{e^t} = 0, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 4x^2 - 1 = \lim_{x\to +\infty} x^2(4 - \frac{1}{x^2}) = +\infty.$$

Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 e^x (3+x) & \text{se} \quad x < 1 \\ 8x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

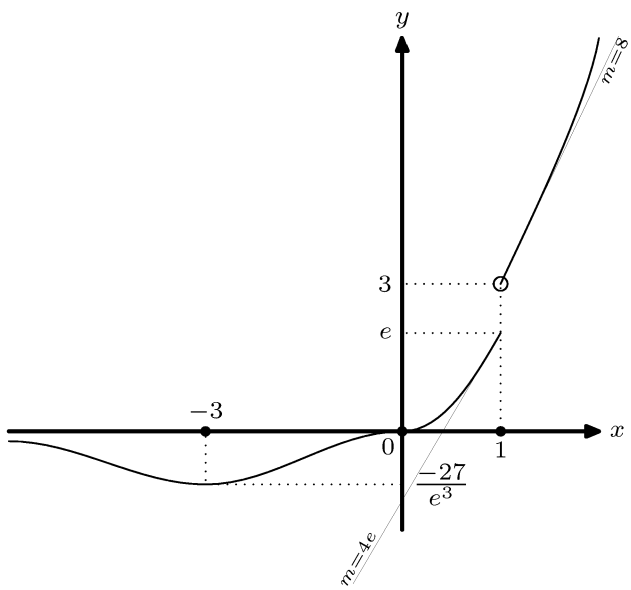
Segno derivata prima (crescenza e decrescenza):



Limiti destro e sinistro di $\mathbf{f'(x)}$ in $\mathbf{x = 1}$ (pendenza destra e sinistra in $\mathbf{x = 1}$):

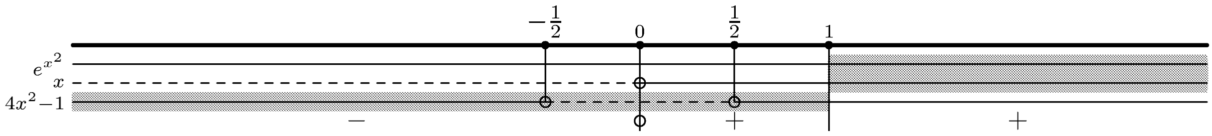
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 e^x (3+x) = 4e, \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 8x = 8.$$

Grafico di $\mathbf{f(x)}$:



Studio di funzione, 3 di 4.

Campo d'esistenza: $\mathbb{R}$.
Segno:



Limiti in $\mathbf{x = 1}$ (continuità):

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} xe^{x^2} = e, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 4x^2 - 1 = 3.$$

Poiché i limiti destro e sinistro non coincidono, $f(x)$ non è continua in $x = 1$.

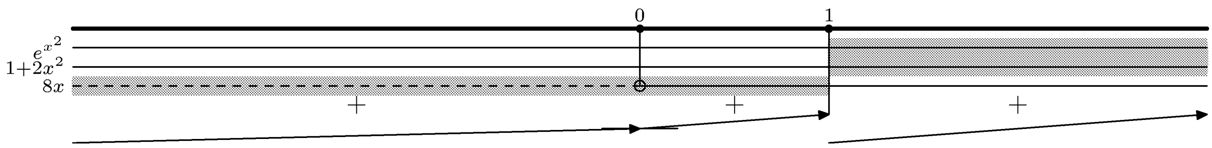
Limiti ai bordi del campo d'esistenza:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} xe^{x^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 4x^2 - 1 = \lim_{x\to +\infty} x^2(4 - \frac{1}{x^2}) = +\infty.$$

Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x^2}(1+2x^2) & \text{se} \quad x < 1 \\ 8x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

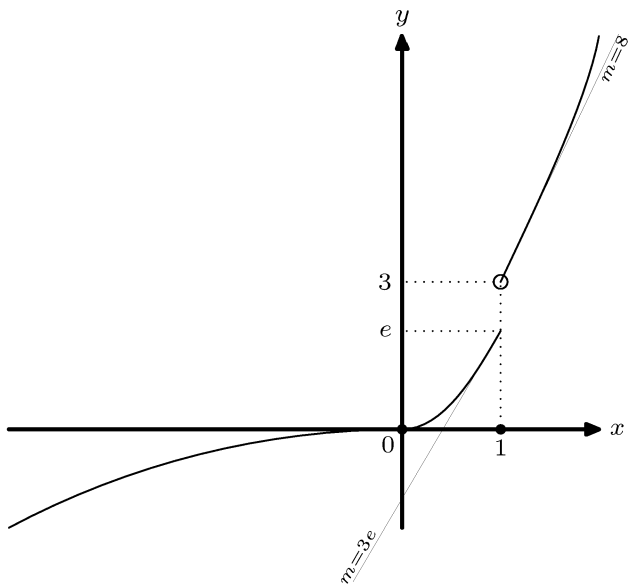
Segno derivata prima (crescenza e decrescenza):



Limiti destro e sinistro di $\mathbf{f'(x)}$ in $\mathbf{x = 1}$ (pendenza destra e sinistra in $\mathbf{x = 1}$):

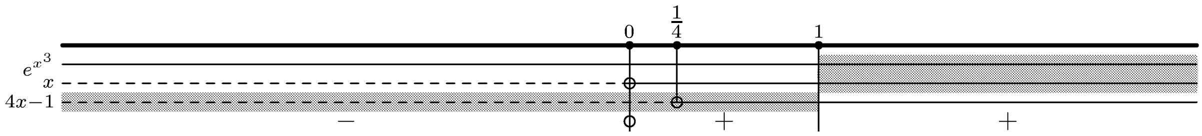
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{x^2}(1+2x^2) = 3e, \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 8x = 8.$$

Grafico di $\mathbf{f(x)}$:



Studio di funzione, 4 di 4.

Campo d'esistenza: $\mathbb{R}$.
Segno:



Limiti in $\mathbf{x = 1}$ (continuità):

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} xe^{x^3} = e, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 4x-1 = 3.$$

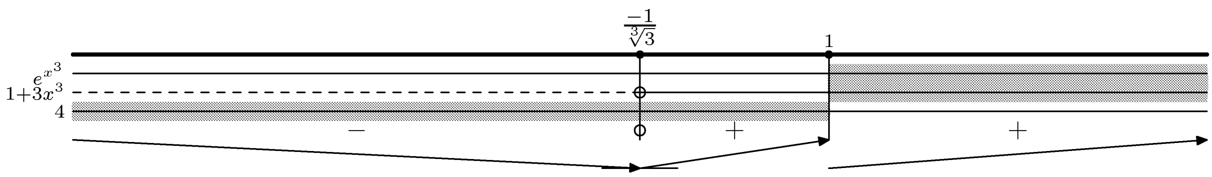
Poiché i limiti destro e sinistro non coincidono, $f(x)$ non è continua in $x = 1$.
Limiti ai bordi del campo d'esistenza:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} xe^{x^3} \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to +\infty} -\frac{t}{e^{t^3}} = 0, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 4x-1 = +\infty.$$

Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x^3}(1+3x^3) & \text{se} \quad x < 1 \\ 4 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

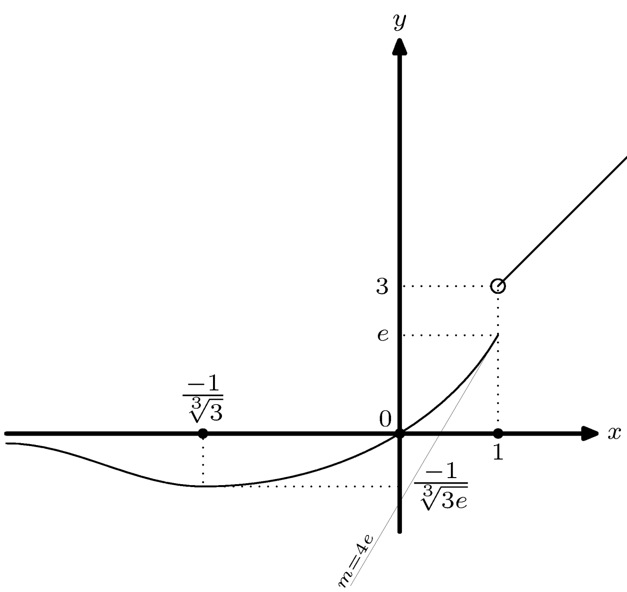
Segno derivata prima (crescenza e decrescenza):



Limiti destro e sinistro di $\mathbf{f'(x)}$ in $\mathbf{x = 1}$ (pendenza destra e sinistra in $\mathbf{x = 1}$):

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{x^3}(1+3x^3) = 4e, \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 4 = 4.$$

Grafico di $\mathbf{f(x)}$:



Studio di grafico di funzione, tutti.
Vedi studio di funzione corrispondente.

Massimi e minimi, 1 di 2.
$f(x) = 2x + (x-1)^2 = x^2 + 1$ è una parabola con concavità verso l'alto e vertice in $(0,1)$, che è dunque l'unico minimo (locale e globale). Poiché $f(-1/2) = 1 + 1/4 < 2 = f(1)$, il punto $(1,2)$ è un massimo sia locale che globale.

Massimi e minimi, 2 di 2.
$f(x) = -2x - (x-1)^2 = -x^2 - 1$ è una parabola con concavità verso il basso e vertice in $(0,-1)$, che è dunque l'unico massimo (locale e globale). Poiché $f(-1/2) = -1 - 1/4 > -2 = f(1)$, il punto $(1,-2)$ è un minimo sia locale che globale.

Zeri, 1 di 2.
$f'(x) = 1/x + 1$ è positiva in $(0 + \infty)$, dunque $f(x)$ è crescente. Poiché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, esiste un unico zero $x_0 > 0$ per $f(x)$. Infine, da $f(1) = 2 > 0$ segue $x_0 \in (0,1)$.

Zeri, 2 di 2.
$f'(x) = 1/x + 1$ è positiva in $(0 + \infty)$, dunque $f(x)$ è crescente. Poiché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, esiste un unico zero $x_0 > 0$ per $f(x)$. Infine, da $f(1) = 3 > 0$ segue $x_0 \in (0,1)$.

Punti fissi, entrambi.
I punti fissi di $f(x)$ sono gli zeri della funzione ausiliaria $F(x) := f(x) - x$, che sono gli zeri di $-F(x)$, che coincide con la funzione dei precedenti esercizi (zeri, 1 di 2 e 2 di 2).

Teorico, 1 di 3.
Si, perché funzione continua su un intervallo chiuso e limitato (teorema di Weierstrass).

Teorico, 2 di 3.
Si, perché $1 \in [f(1) = 0, f(e^2) = 2]$ (teorema dei valori intermedi).

Teorico, 3 di 3.
Si, perché $f(0) = f(1) = 0$ (teorema di Lagrange).